

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA SUPLEMENTAR 1

NÚMEROS COMPLEXOS E FUNÇÕES COMPLEXAS

Números Complexos

- (1) Descreva as regiões do plano complexo definidas por

$$|z - i| \leq c|z| ,$$

onde c é um número real não negativo.

- (2) Resolva a equação quadrática

$$z^2 + 2iz + i - 1 = 0 .$$

Resolução: Pela fórmula resolvente para a equação quadrática,

$$\begin{aligned} z^2 + 2iz + i - 1 = 0 &\iff z = -i \pm \sqrt{-i} \\ &\iff z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-2}{2}i \quad \text{ou} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}+2}{2}i \end{aligned}$$

□

Comentário: A fórmula resolvente para a equação quadrática vale para equações com coeficientes complexos. A sua demonstração resume-se a:

$$az^2 + bz + c = a \left(z - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) ,$$

onde $\sqrt{\cdot}$ e $-\sqrt{\cdot}$ representam as duas raízes quadradas de um número complexo. ◇

- (3) Determine todas as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

$$z^6 = (i + 2)^3 + \frac{1 - 28i}{2 - i} .$$

Resolução: Primeiro simplifica-se o lado direito:

$$(i + 2)^3 + \frac{1 - 28i}{2 - i} = i^3 + 6i^2 + 12i + 8 + \frac{30 - 55i}{5} = 8 .$$

As soluções da equação são portanto as raízes sextas de 8, ou seja,

$$z = \sqrt[6]{2} e^{i \frac{k\pi}{3}} \quad \text{com} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} .$$

□

- (4) Resolva a seguinte equação

$$1 + 3z + 3z^2 + z^3 = 4\sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{2}} (e^{i \frac{\pi}{2}} + e^{-i3\pi}) .$$

Diferenciabilidade

- (5) (a) Seja $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação linear onde \mathbb{C} é considerado espaço vectorial de dimensão 2 sobre \mathbb{R} . Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a matriz que representa T relativamente à base $1, i$ de \mathbb{C} , ou seja, $T(x + yi) = (ax + by) + (cx + dy)i$. Mostre que a aplicação T é multiplicação por um número complexo se e só se

$$a = d \quad \text{e} \quad b = -c.$$

- (b) Uma função analítica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ considerada como uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem por derivada em cada z_0 uma aplicação linear (a sua *jacobiana*),

$$Df_{z_0} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

A aplicação Df_{z_0} corresponde à multiplicação por um número complexo, $f'(z_0)$. Qual é esse número em termos das entradas de Df_{z_0} ?

Resolução:

- (a) Suponha-se que T é multiplicação por um número complexo, $a + ci$. Então

$$T(x + yi) = (a + ci)(x + yi) = (ax - cy) + (cx + ay)i.$$

Relativamente à base $1, i$ de \mathbb{C} , fica

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ou seja, as entradas da diagonal são iguais e as da anti-diagonal são simétricas.

Suponha-se, reciprocamente, que, relativamente à base $1, i$ de \mathbb{C} , a aplicação linear T é dada por uma matriz

$$\begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - cy \\ cx + ay \end{bmatrix}.$$

Então $T(x + yi) = (ax - cy) + (cx + ay)i = (a + ci)(x + yi)$, pelo que T é multiplicação pelo número complexo $a + ci$.

- (b) Considerando a função complexa de variável complexa

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x + yi &\longmapsto u(x + yi) + iv(x + yi) \end{aligned}$$

como uma função vectorial real de duas variáveis reais,

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (u(x, y), v(x, y)), \end{aligned}$$

a sua jacobiana no ponto (x_0, y_0) correspondente a $z_0 = x_0 + iy_0$ é

$$Df_{z_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

De acordo com a alínea (a), conclui-se que Df_{z_0} se traduz na multiplicação pelo número complexo

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$(\text{onde } \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)).$$

□

Equações de Cauchy-Riemann

(6) Use as equações de Cauchy-Riemann para decidir sobre a analiticidade das seguintes funções (onde $z = x + yi$):

(a) $f(z) = |z|^2 z = x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)i$;

(b) $f(z) = e^{x^2-y^2} (\cos^2(xy) - \frac{1}{2} + i \cos(xy) \sin(xy))$.

(7) Determine o domínio de diferenciabilidade das seguintes funções:

(a) $f(z) = e^{xy} - e^{-xy} + xyi$;

(b) $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$ (para $z \neq 0$);

onde $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$.

Resolução:

(a) As equações de Cauchy-Riemann são necessárias para a diferenciabilidade. A função

$$f(x + iy) = \underbrace{e^{xy} - e^{-xy}}_{u(x,y)} + \underbrace{xy}_{v(x,y)}i$$

não satisfaz as equações de Cauchy-Riemann fora da origem porque:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} &\iff \begin{cases} ye^{xy} + ye^{-xy} &= x \\ -xe^{xy} - xe^{-xy} &= y \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} xy(e^{xy} + e^{-xy}) &= x^2 \\ xy(e^{xy} + e^{-xy}) &= -y^2 \end{cases} \\ &\implies x^2 = -y^2 \implies x = y = 0 \end{aligned}$$

Na origem as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas, e na origem f é de facto diferenciável porque

$$\begin{aligned} &\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{xy} - e^{-xy} + ixy}{x + iy} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{[(e^{xy} - e^{-xy})x + xy^2] + i[x^2y - (e^{xy} - e^{-xy})y]}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2x^2y + xy^2 + (...)}{x^2 + y^2} + i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x^2y - 2xy^2 + (...)}{x^2 + y^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde (...) representa termos de ordem superior que não contribuem para o limite. Conclui-se que f é diferenciável apenas em 0.

Comentário: Em alternativa, podia-se invocar o teorema que afirma que, quando as derivadas parciais são contínuas, as equações de Cauchy-Riemann são também uma condição suficiente para a diferenciabilidade; ver, por exemplo, p.26 de Complex Analysis por L. Ahlfors. Este resultado é aplicado na alínea seguinte. ◇

- (b) Quando as partes real e imaginária de uma função complexa são continuamente diferenciáveis, as equações de Cauchy-Riemann são suficientes para a diferenciabilidade. Neste caso a função f tem derivadas contínuas em todo o seu domínio e satisfaz sempre as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

Conclui-se que f é diferenciável em todo o seu domínio.

Comentário: A função dada é igual a $f(z) = \frac{1}{z}$, cuja derivada é $-\frac{1}{z^2}$ para qualquer $z \neq 0$. \diamond

□

- (8) Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

- (a) Mostre que u é uma função harmónica.
 (b) Determine a função harmónica conjugada, v , tal que $v(0, 0) = 0$.
- (9) (a) Mostre que, em coordenadas polares, as equações de Cauchy-Riemann se escrevem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

onde $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$.

- (b) Mostre que a função

$$f(z) = 2 \log \frac{\rho}{2} + 2i\theta$$

é analítica em todo o seu domínio, $\rho > 0$ e $\theta \in]0, 2\pi[$.

- (c) Calcule a derivada, $f'(z)$, da função da alínea anterior em termos de z .

Resolução:

- (a) Se

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

então

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \frac{\cos \theta}{\rho} \end{bmatrix}.$$

As equações de Cauchy-Riemann ficam

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} & (*) \\ -\frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} & (**) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos \theta (*) - \sin \theta (**) \\ \sin \theta (*) + \cos \theta (**) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

- (b) Quando as partes real e imaginária de uma função complexa são continuamente diferenciáveis, as equações de Cauchy-Riemann são suficientes para a diferenciabilidade. Neste caso,

$$u = \operatorname{Re} f = 2 \log \frac{\rho}{2}$$

$$v = \operatorname{Im} f = 2\theta$$

e as equações de Cauchy-Riemann são sempre satisfeitas:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases} .$$

Logo, f é analítica em todo o seu domínio.

(c)

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\
 &= \left(\frac{2}{\rho} \cos \theta + 0 \right) + i \left(0 - 2 \frac{\sin \theta}{\rho} \right) \\
 &= \frac{2\rho \cos \theta - i 2\rho \sin \theta}{\rho^2} \\
 &= \frac{2\bar{z}}{|z|^2} \\
 &= \frac{2}{z} .
 \end{aligned}$$

Comentário: A função dada é igual a $f(z) = \log \frac{z^2}{4}$, onde \log representa o ramo principal do logaritmo. \diamond

□

Funções Trigonômicas

(10) Prove que

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y .$$

Resolução:

$$\begin{aligned} \sin(x + iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ &= \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} \\ \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{y+ix} - e^{y-ix} + e^{-y+ix} - e^{-y-ix} - e^{y+ix} - e^{y-ix} + e^{-y+ix} + e^{-y-ix}}{4i} \\ &= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} \end{aligned}$$

□

(11) Mostre que, para $z = x + yi$, se tem

$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x .$$

(12) Estabeleça seguinte igualdade (onde $z = x + yi$)

$$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh(2y) .$$

Exponenciais e Logaritmos

(13) Determine todas as soluções da equação

$$z^{2i} - 2z^i + 2 = 0 .$$

Resolução: Nas equações seguintes, o símbolo $\text{Log } z$ representa genericamente os logaritmos de z .

$$\begin{aligned} z^{2i} - 2z^i + 2 = 0 &\iff (z^i)^2 - 2z^i + 2 = 0 \\ &\iff z^i = 1 \pm i \\ &\iff i \text{Log } z = \text{Log}(1 \pm i) \\ &\iff \text{Log } z = \frac{1}{i} [\ln |1 \pm i| + i(\arg(1 \pm i) + 2k\pi)] \\ &\iff \text{Log } z = -i \ln \sqrt{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\iff z = e^{\pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \sqrt{2}} , \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

□

- (14) Se z e w forem números complexos com $z \neq 0$, o símbolo z^w representa o conjunto dos números complexos s que têm logaritmo da forma $w\alpha$, para algum logaritmo α de z . (Ou seja, $e^{w\alpha} = s$ e $e^\alpha = z$ para algum número complexo α .) Descreva o conjunto z^w quando $z = 1$ and $w = \frac{1}{3} + i$.

Resolução: Tem-se que $1 = e^{2k\pi i}$ para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. Consequentemente:

$$\begin{aligned} 1^{\frac{1}{3}+i} &= e^{(\frac{1}{3}+i)\text{Log } 1} \\ &= e^{(\frac{1}{3}+i)2k\pi i} \\ &= e^{\frac{2k\pi}{3}i - 2k\pi} \\ &= e^{-2k\pi} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

□